1.

a) Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Sin hacer cálculos, halle un autovalor λ y un autovector $\vec{v}$ correspondiente a λ de la matriz. (3 puntos)

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}.$$

b) Sea $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ un autovector de una matriz $n \times n$, C, correspondiente al autovalor $\lambda = 2$. Determine una solución del sistema $C\vec{x} = \vec{b}$. (3 puntos)

2.

a) Aplique el proceso de Gram-Schmidt al conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^3$ para hallar una base auto-normal de $\mathbb{R}^3$. (4 puntos)

b) Sea $H = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Exhiba una base ortonormal de $H^\perp$. (2 puntos)

c)) Halle $\text{Proy}_{H^\perp} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. (2 puntos

3. De la transformación lineal $T : P_2 \to P_3$, se conocen los transformados de los elementos de la base $B = \{-1 + x + x^2, x + 2x^2, x + x^2\}$ de P_2 :

$$\begin{aligned} T(-1 + x + x^2) &= 1 + x \\ T(x + 2x^2) &= x^3 \\ T(x + x^2) &= x^2. \end{aligned}$$

a) Halle la imagen bajo T de un polinomio cualquiera $f = a + bx + cx^2$. (4 puntos)

b) Halle la matriz de T con respecto a las bases $B_2 = \{1, x, x^2\}$ de P_2, y $B_3 = \{1, x, x^2, x^3\}$ de P_3. (3 puntos)

c) Halle el núcleo de T y $\nu(T.)$ (2 puntos)

4. Para cada enunciado siguiente escriba al lado una V si los considera verdadero o una F si lo considera falso. Justifique luego su respuesta: (12 puntos)

a) En $\mathbb{R}^2$, el producto $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1 x_2 - y_1 y_2$ define un producto interno.

b) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, y $T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

c) Si λ es un autovalor de la matriz A, entonces $\nu(A - \lambda I) > 0$.

d) La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ es ortogonal.

e) Vista como una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$, la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ es la composición de una expansión a lo largo del eje y, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ con la transformación de $\mathbb{R}^2$ dada por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

f) Si la matriz A, 3×3 tiene tres autovalores distintos, entonces se puede escoger una base de $\mathbb{R}^3$ que conste de autovalores de A.